***Teorema 5:*** (Aturan Jumlah)

Jika f dan g dua fungsi dengan f '(x) dan g'(x) ada, h fungsi yang didefinisikan sebagai h(x) = f(x) + g(x), maka h'(x) = f '(x) + g'(x).

Secara simbolik:

h(x) = f(x) + g(x) dan f '(x), g'(x) ada ⇒ h'(x) = f '(x) + g'(x)

Bukti: h(x) = f(x) + g(x) ⇒ h(x+h) = f(x+h) + g(x+h)

h'(x) =

=

= +

= f'(x) + g'(x) ∎

∴h(x) = f(x) + g(x) ⇒ h'(x) = D(h(x)) = f '(x) + g'(x)

***Teorema 6:*** (Aturan Selisih)

Jika f dan g dua fungsi dengan f '(x) dan g'(x) ada, h fungsi yang didefinisikan sebagai h(x) = f(x) - g(x), maka h'(x) = f '(x) - g'(x).

Secara simbolik:

h(x) = f(x) - g(x) ∧ f '(x),g'(x) ada ⇒ D(h(x)) = f '(x) - g'(x)

Bukti: h(x) = f(x) - g(x) ⇒ h(x+h) = f(x+h) - g(x+h)

h'(x) =

=

=

= f '(x) - g'(x) ∎

∴h(x) = f(x) - g(x) ⇒ h'(x) = D(h(x)) = f '(x) - g'(x)

Contoh 1: Diketahui f(x) = g(x) + h(x), jika g(x) = 3 x2 dan h(x) = 10x. Tentukan f '(x).

Penyelesaian: g(x) = 3 x2 ⇒ g'(x) = 6x

h(x) = 10x ⇒ h'(x) = 10

f(x) = 3 x2 + 10x, berdasar aturan jumlah diperoleh

f '(x) = 6x + 10

∴ f(x) = 3 x2 + 10x ⇒ f '(x) = 6x + 10

Contoh 2: Diketahui f(x) = g(x) - h(x), jika g(x) = 3 x3 dan h(x) = 15 x2 . Tentukan f '(x).

Penyelesaian: g(x) = 3 x3 ⇒ g'(x) = 9 x2

h(x) = 15 x2 ⇒ h'(x) = 30 x

f(x) = 3 x3 - 15x2 , berdasar aturan selisih diperoleh

f '(x) = 9 x2 - 30 x

∴ f(x) = 3 x 3 - 15 x2 ⇒ f '(x) = 9 x2 - 30 x

***Teorema 7:*** (Aturan hasil kali)

Jika f dan g dua fungsi dengan f '(x) dan g'(x) ada, h fungsi yang didefinisikan sebagai h(x) = f(x).g(x), maka h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f '(x).

Secara simbolik:

h(x) = f(x).g(x) ∧ f '(x),g'(x) ada ⇒ D(h(x)) = f(x) g'(x) + g(x)f '(x).

Bukti: h(x) = f(x).g(x) ⇒ h(x+h) = f(x+h).g(x+h)

h'(x) = ***ruas suatu persamaan tidak berubah nilainya bila ditambah dengan nol*** ()

=

=

=

= +

= f(x).g'(x) + g(x) . f '(x) ∎

∴ h(x) = f(x)g(x) ⇒ h'(x) = f(x) g'(x) + g(x) f '(x)

Contoh 1: Diketahui f(x) = g(x) . h(x), jika g(x) = 2x - 1 dan h(x) = 3 x2 . Tentukan f '(x),

Penyelesaian: f(x) = (2x - 1)( 3 x2 ) dengan cara biasa

f(x) = 6 x3 - 3 x2

f '(x) = 6 . 3 x2 - 3 . 2 x

= 18 x2 - 6 x

Cara 2: (Aturan hasil kali)

f(x) = (2x - 1)( 3 x2 )

g(x) = 2x - 1, maka g'(x) = 2

h(x) = 3 x2 , maka h'(x) = 6x

f '(x) = (2x - 1)6x + 3 x2 . 2

= 12 x2 - 6x + 6 x2

= 18 x2 - 6x

Contoh 2: Diketahui g(x) = (x2 - 4x + 4) dan h(x) = (4 x - 7) dan f(x) = g(x) . h(x). Tentukan f '(x).

Penyelesaian: g(x) = (x2 - 4x + 4), maka g'(x) = 2x - 4

h(x) = (4x - 7), maka f '(x) = 4

f '(x) = (x2 - 4x + 4)(4) + (4x - 7)(2x - 4)

= 4 x2 - 16x + 16 + 8 x2 - 30x + 28

= 12 x2 - 46x + 44

**Apa yang terjadi jika h(x) = g(x)?**

Jika f(x) = g(x).h(x), turunan pertamanya yaitu f ' (x) = g(x).h' (x) + h(x) g' (x). Jika h(x) = g(x) didapat f(x) = g(x). g(x) atau

f(x) = (g(x))2, bagaimana dengan f ' (x)?

Dengan mengganti huruf h dengan g di dapat

f ' (x) = g(x).g' (x) + g(x) g' (x) atau

= 2 g(x).g' (x)

∴ f(x) = (g(x))2 ⇒ f '(x) = 2 g(x).g' (x)

Sekarang, kita perhatikan

f(x) = (g(x))3

=(g(x))2 (g(x))

Selanjutnya, ditentukan turunan dari f(x) berdasar aturan perkalian, didapat

f '(x) = (g(x))2. g'(x) + g(x).{(g(x))2}'

= (g(x))2. g'(x) + g(x). 2 g(x).g'(x) [∵{(g(x))2}' = 2 g(x).g'(x) ]

= (g(x))2. g'(x) + 2 (g(x))2. g'(x)

= 3 (g(x))2. g'(x)

∴ f(x) = (g(x))3 ⇒ f '(x) = 3 (g(x))2. g'(x)

Bila hal ini diteruskan untuk f(x) = (g(x))4, didapat f '(x) = 4 (g(x))3. g'(x).

Berdasar pola yang ada, f(x) = (g(x))n didapat f '(x) = n (g(x))n-1. g'(x)

∴ f(x) = (g(x))n ⇒ f '(x) = n (g(x))n-1. g'(x) . . . (\*)

Teorema 8: (Aturan hasil bagi)

Jika f dan g dua fungsi dengan f '(x) dan g'(x) ada, h fungsi yang didefinisikan sebagai h(x) = f(x)/g(x), maka h'(x) =

Secara simbolik:

h(x) = f(x)/g(x) ∧ f '(x),g'(x) ada ⇒ h'(x) =

Bukti: h(x) = f(x)/g(x) ⇒ h(x+h) = f(x+h)/(g(x+h)

h(x+h) – h(x) =

=

=

= ***ruas suatu persamaan***

***tidak berubah nilainya bila ditambah dengan nol*** ()

h '(x) =

=

=

=

=

= . f ' (x) - . g '(x) atau

=

∴ h(x) = f(x)/g(x) ⇒ h'(x) =

Contoh 1: Diketahui f(x) = f(x)/g(x), dengan g(x) = 3 - 2x dan h(x) = 3 + 2x. Tentukan f '(x).

Penyelesaian: g(x) = 3 - 2x, maka g'(x) = -2

h(x) = 3 + 2x, maka h'(x) = 2

f '(x) =

=

=

Contoh 2: Diketahui f(x) = , dengan g(x) = x2 + 10 dan h(x) = 3 x2 . Tentukan f '(x).

Penyelesaian: g(x) = x2 + 10 , maka g'(x) = 2x

h(x) = 3 x2 maka h'(x) = 6x

f '(x) =

=

=

**3.6**. **Turunan Fungsi Trigonometri**

**3.6.1. Turunan Fungsi Sinus**

Jika f(x) = sin x, maka f '(x) = cos x

Bukti: f(x) = sin x ⇒ f(x+h) = sin (x+h)

f(x+h) - f(x) = sin (x+h) - sin x

= 2 cos 1/2 ((x+h) + x) . sin 1/2 (x+h) - x)

= 2 cos ( x + 1/2 h) . sin 1/2h

f '(x) =

=

=

=

= cos x . 1

= cos x ∎

∴ f(x) = sin x ⇒ f '(x) = D(sin x) = cos x

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = (x + 3) + 2 sin x

b. f(x) = sin2 x

c. f(x) = x sin x

d. f(x) =

Penyelesaian: a. f(x) = (x + 3) + 2 sin x

Misal g(x) = (x + 3) ⇒ g'(x) = 1

Misal h(x) = 2 sin x ⇒ h'(x) = 2 cos x

∴f '(x) = 1 + 2 cos x

b. f(x) = sin2 x = sin x . sin x

f '(x) = sin x . cos x + sin x . cos x

∴f '(x) = 2 sin x cos x

c. f(x) = x sin x

Misal g(x) = x ⇒ g'(x) = 1

Misal h(x) = sin x ⇒ h'(x) = cos x

f '(x) = x . cos x + sin x . 1

∴ f '(x) = x cos x + sin x

d. f(x) =

Misal g(x) = x ⇒ g'(x) = 1

Misal h(x) = sin x ⇒ h'(x) = cos x

f '(x) =

∴ f '(x) =

**3.6.2. Turunan Fungsi Cosinus**

Jika f(x) = cos x, maka f '(x) = - sin x

Bukti: f(x) = cos x ⇒ f(x+h) = cos (x+h)

f(x+h) - f(x) = cos (x+h) - cos x

= - 2 sin 1/2 ((x+h) + x) . sin 1/2 (x+h) - x)

= - 2 sin ( x + 1/2 h).sin 1/2h

f '(x) =

=

=

= - sin x . 1

= - sin x ∎

∴f(x) = cos x ⇒ D(cos x) = - sin x

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = (3x + 3) + 2 cos x

b. f(x) = cos2 x

c. f(x) = 2x cos x

d. f(x) =

Penyelesaian: a. f(x) = (3x + 3) + 2 cos x

Misal g(x) = (3x + 3) ⇒ g'(x) = 3

Misal h(x) = 2 cos x ⇒ h'(x) = - 2 sin x

∴ f '(x) = 3 - 2 sin x

b. f(x) = cos2 x = cos x . cos x

f '(x) = (cos x . - sin x) + (cos x . - sin x)

∴ f '(x) = - 2 sin x cos x

c. f(x) = 2x cos x

Misal g(x) = 2x ⇒ g'(x) = 2

Misal h(x) = cos x ⇒ h'(x) = - sin x

f '(x) = 2x . -sin x + cos x . 2

∴ f '(x) = - 2x sin x + 2 cos x

d. f(x) =

Misal g(x) = cos x ⇒ g'(x) = - sin x

Misal h(x) = x2 ⇒ h'(x) = 2x

f '(x) =

∴f '(x) =

**3.6.3. Turunan Fungsi Tangen**

Jika f(x) = tan x, maka f '(x) = sec2 x

Bukti:

f(x) = tan x ⇒ f(x+h) = tan (x + h) =

f(x+h) - f(x) = - tan x

=

=

=

=

f '(x) =

f '(x) =

=

= 1 . sec2 x . 1

= sec2 x ∎

∴f(x) = tan x ⇒ f '(x) = D(tan x) = sec2 x

Cara lain untuk memperoleh turunan f(x) = tan x, yaitu dengan menerapkan teorema 8

f(x) = tan x ⇔ f(x) =

f '(x) =

=

= (

= sec2 x ∎

∴ f(x) = tan x ⇒ f '(x) = D(tan x) = sec2 x

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = (x2 - 2x + 3) + tan x

b. f(x) = tan2 x

c. f(x) = 2x tan x

d. f(x) =

Penyelesaian: a. f(x) = (x2 - 2x + 3) + tan x

Misal g(x) = (x2 - 2x + 3) ⇒ g'(x) = 2x - 2

Misal h(x) = tan x ⇒ h'(x) = sec2 x

∴ f '(x) = 2x - 2 + sec2 x

b. f(x) = tan2 x = tan x . tan x

f '(x) = tan x . sec2 x + tan x . sec2 x

∴ f'(x) = 2 tan x sec2 x

c. f(x) = x tan x

Misal g(x) = 2x ⇒ g'(x) = 2

Misal h(x) = tan x ⇒L h'(x) = sec2 x

f '(x) = 2x . sec2 x + tan x . 2

∴ f '(x) = 2x sec2 x + 2 tan x

d. f(x) =

Misal g(x) = x2 ⇒ g'(x) = 2 x

Misal h(x) = tan x ⇒ h'(x) = sec2 x

f '(x) =

∴ f '(x) =

**3.6.4. Turunan Fungsi Cotangen**

Jika f(x) = cot x, maka f '(x) = -csc2 x

Bukti: f(x) = cot x ⇒ f(x) = -csc2 x

f (x) = cot x =

f '(x) =

=

=

= -

= - csc2 x ∎

∴ f(x) = cot x ⇒ f'(x) = D(cot x) = -csc2 x

Contoh : a. f(x) = (x2 + 2x + 3) + cot x

b. f(x) = cot2 x

c. f(x) = x3 cot x

d. f(x) =

Penyelesaian : a. f(x) = (x + 2x + 3) + cot x

Misal g(x) = (x + 2x + 3) ⇒ g'(x) = 2x + 2

Misal h(x) = cot x ⇒ h'(x) = - csc2 x

∴ f '(x) = 2x + 2 – csc2 x

b. f(x) = cot2 x = cot x . cot x

f '(x) = cot x . – csc2 x + cot x . – csc2 x

∴ f '(x) = - 2 cot x. csc2 x

c. f(x) = x cot x

Misal g(x) = x3 ⇒ g'(x) = 3 x2

Misal h(x) = cot x ⇒ h'(x) = - csc2 x

f '(x) = cot x . 3 x2 + x . (- csc2 x)

∴ f '(x) = 3 x2 cot x - x csc2 x

d. f(x) =

Misal g(x) = 2x ⇒ g'(x) = 2

Misal h(x) = cot x ⇒ g'(x) = - csc2 x

f '(x) =

∴ f '(x) =

**3.6.5. Turunan Fungsi Secant**

Jika f(x) = sec x, maka f '(x) = sec x . tan x

Bukti: f(x) = sec x atau f(x) =

f '(x) =

=

=

=

= tan x. sec x atau

= sec x.tan x ∎

∴ f(x) = sec x ⇒ f '(x) = D(sec x) = sec x . tan x

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = (x3 + 2x2 + 12) + sec x

b. f(x) = sec2 x

c. f(x) = x5 sec x

d. f(x) =

Penyelesaian : a. f(x) = (x3 + 2x2 + 12) + sec x

Misal g(x) = (x3 + 2x2 + 12) ⇒ g'(x) = 3x2 +4x

Misal h(x) = sec x ⇒ h'(x) = sec x tan x

∴ f '(x) = 3x2 +4x + sec x tan x

b. f(x) = sec2 x = sec x . sec x

f '(x) = sec x (sec x tan x) + sec x (sec tan x)

∴ f '(x) = 2 sec2 x tan x

c. f(x) = x5 sec x

Misal g(x) = x5 ⇒ g'(x) = 5 x4

Misal h(x) = sec x ⇒ h'(x) = sec x tan x

f '(x) = x5 (sec x tan x) + 5 x4 sec x

∴ f '(x) = x4 sec x (x tan x + 5)

d. f(x) =

Misal g(x) = sec x ⇒ g'(x) = sec x tan x

Misal h(x) = 3 x ⇒ h'(x) = 3

f '(x) =

∴f '(x) =

**3.6.6. Turunan Fungsi Cosecant**

Jika f(x) = csc x, maka f '(x) = -csc x . cot x

Bukti: f(x) = csc x atau f (x) =

f '(x) =

=

= .

= - csc x . cot x ∎

∴ f(x) = csc x ⇒ f '(x) = - csc x . cot x

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = (x3 + 2x + 10) + 5 csc x

b. f(x) = 3 csc2 x

c. f(x) = x4 csc x

d. f(x) =

Penyelesaian : a. f(x) = (x + 2x + 10) + 5 csc x

Misal g(x) = (x2 + 2x + 10) ⇒ g'(x) = 2x + 2

Misal h(x) = 5 csc x ⇒ h'(x) = - 5 csc x cot x

∴ f '(x) = (2x + 2) - 5 csc x cot x

b. f(x) = 3 csc2 x = (3 csc x)(csc x)

f '(x) = (3 csc x)(- csc x .cot x) + csc x (- 3 csc x . cot x)

∴ f '(x) = - 6 csc2 x cot x

c. f(x) = x4 csc x

Misal g(x) = x4 ⇒ g'(x) = 4 x3

Misal h(x) = csc x ⇒ h'(x) = - csc x cot x

f '(x) = x4 (- csc x ctg x) + csc x (4 x3 )

∴ f '(x) = x3 csc x (4 - x cot x)

d. f(x) =

Misal g(x) = 15 ⇒ g'(x) =0

Misal h(x) ⇒ h'(x) = - csc x cot x

f '(x) =

∴f '(x) =